技術社会システム
第3回：組合せ爆発

担当教員：蓮池 隆(はすいけ たかし)
連絡先：thasuike@waseda.jp

前回の演習の解答

演習2-2

- ある商人が王様に宝石を献上したところ，王様はその宝石を大変気にいったので，商人に対し望みの褒美を取らせると言った．そこで商人は次のように答えた．
- 「**n**日間，金貨を頂きたく存じます．ただし頂く金貨の枚数は以下の規則に従うとします．」
- 以下のそれぞれの場合で，受け取れる金貨の総数を求めなさい．(nを用いて表すこと)

(1)毎日２枚づつ.

(2)１日目には１枚，そのあと毎日２枚づつ増やしていく.

(3)１日目には１枚，そのあと毎日２倍づつ増やしていく.

解答例

<u>演習2-2(公式から出せましたよね？)</u>

- 「**n**日間，金貨を頂きたく存じます．ただし頂く金貨の枚数は以下の規則に従うとします．」

(1)毎日２枚づつ.

→ $2n$ (線形オーダー)

(2) 1 日目には 1 枚，そのあと毎日２枚づつ増やしていく.

→ n^2 (多項式オーダー)

(3) 1 日目には 1 枚，そのあと毎日２倍づつ増やしていく.

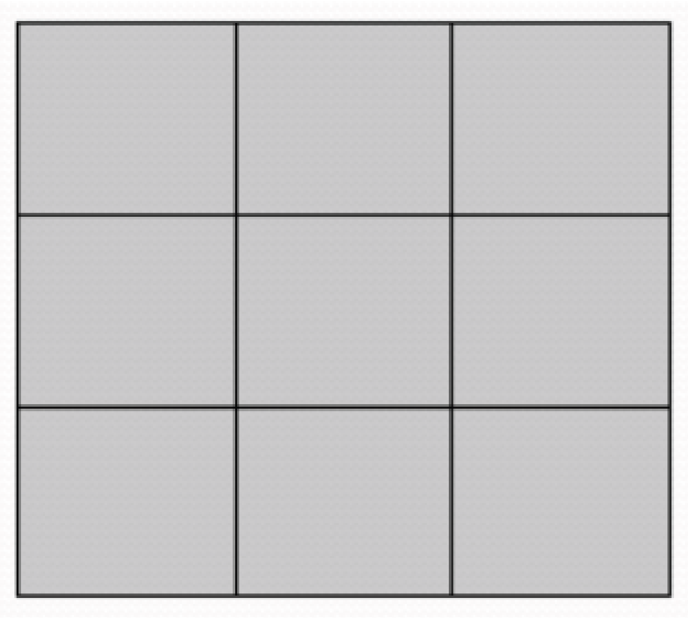
→ 2^n (指数オーダー)

nに関するオーダーが異なる

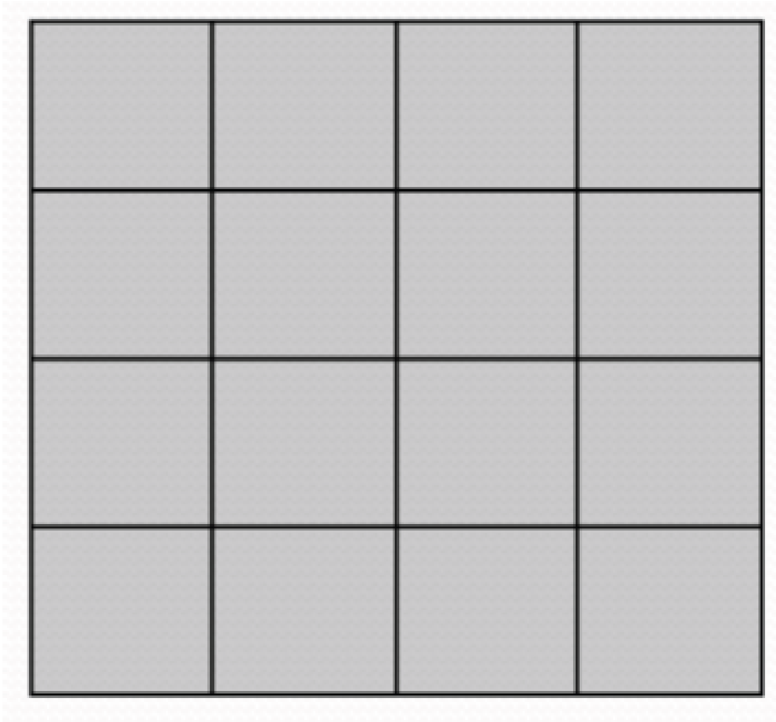
早速演習です

演習3-1(魔方陣)

- 目的：n×nの表を1からn^2の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 条件：各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.



(1)3×3



(2)4×4

解答例(3×3の場合)

演習3-1(魔方陣)

- 目的：n×nの表を1からn^2の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 条件：各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

(1)3×3

解答例(4×4の場合)

演習3-1(魔方陣)

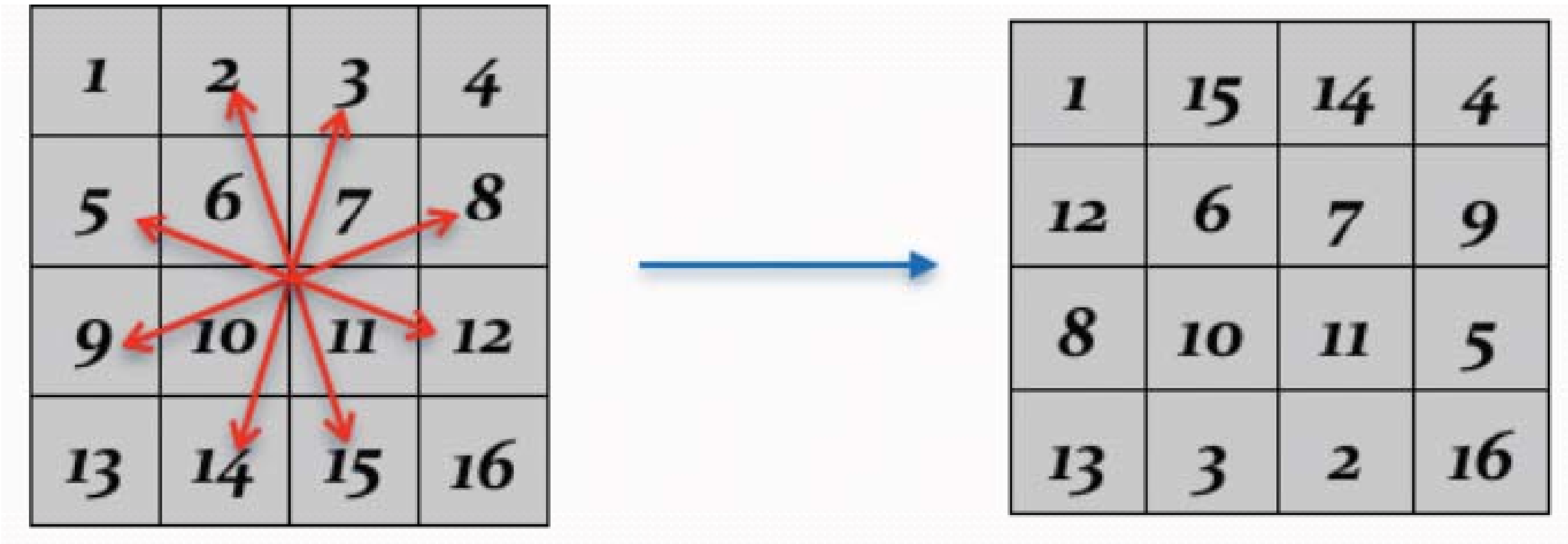
- 目的：n×nの表を1からn^2の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 条件：各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(2)4×4

ちなみに…

- 簡単な作り方の1例(これで全てのパターンを作れるわけではないので注意)
- 1から16までを順に書き，大桂馬の位置を交換する

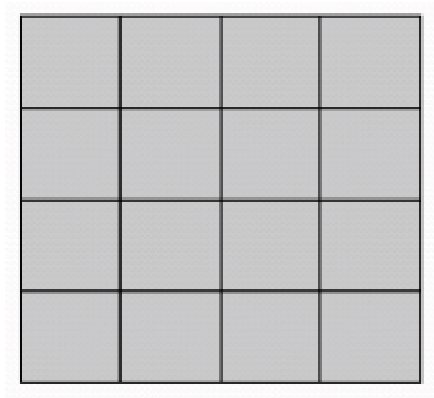


演習3-2

- 目的：n×nの表を1からn^2の数字を一つずつ用いてマスを埋める.

(1)(条件をはずして)数字を埋める組合せの全数を求めよ

- 3×3：○通り (○桁)
- 4×4：○通り (○桁)
- 5×5：○通り (○桁)



(2)(条件の下で)解の個数は以下で与えられる

- 3×3：8通り (**1**桁)
- 4×4：7,040通り (**4**桁)
- 5×5：2,202,441,792通り (**10**桁)

解答例(組合せ爆発)

(1)(条件をはずして)数字を埋める組合せの
全数を求めよ

- 3×3： 9! =362880通り (**6**桁),
- 4×4：16! =20922789888000通り (**14**桁),
- 5×5：25! =15511210043330985984000000通り (**26**桁)

(2)解の個数は以下で与えられる

- 3×3：8通り (**1**桁)
- 4×4：7,040通り (**4**桁)
- 5×5：2,202,441,792通り (**10**桁)

組合せ爆発

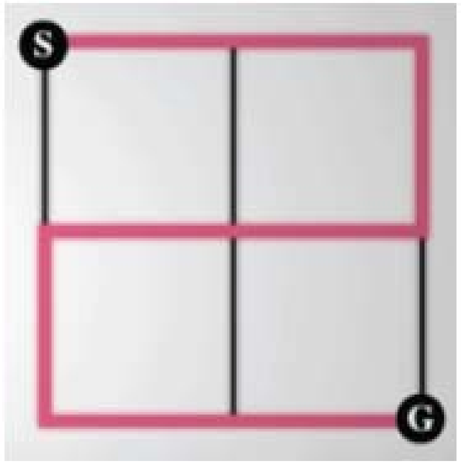
魔法陣の解の全数探索

- コンピュータが１秒間に1千億通りの組合せパターンを確認できるとして，5×5 の全ての解を求め終えるまでに，およそ490万年(7桁)かかる.

→人間の寿命はおよそ100年(3桁)

→ **現実的にはコンピュータでも不可能な領域！**

前回の復習



演習2-3

- 目的:格子上で S から G までの道順を全て数え上げる.
- 同じ場所を通らない. (点でもNG)

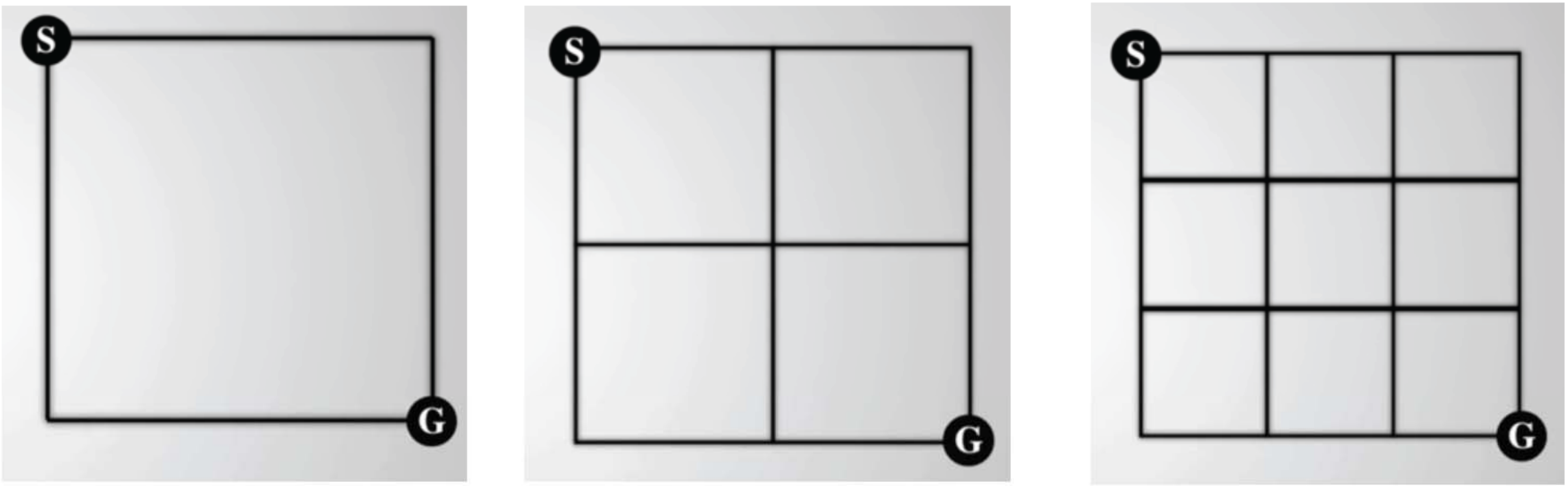
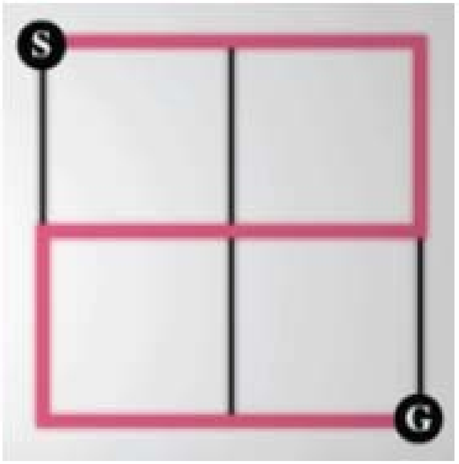


図1：1×1　　図2：2×2　　図3：3×3

解答例

演習2-3

- 目的:格子上で S から G までの道順を全て数え上げる.
- 同じ場所を通らない. (点でもNG)



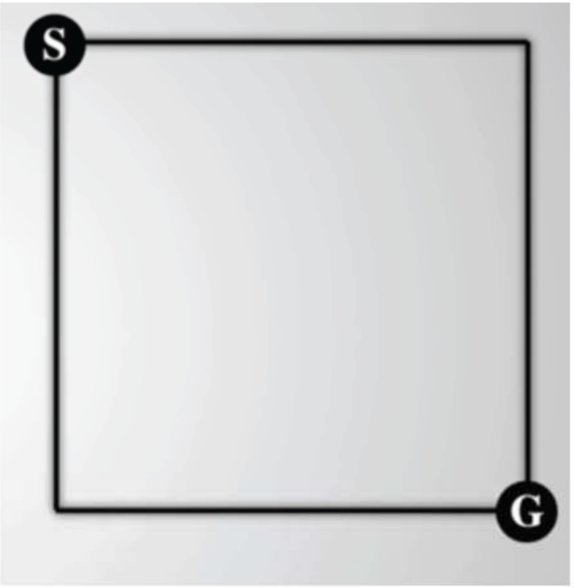


図１：1×1

2通り

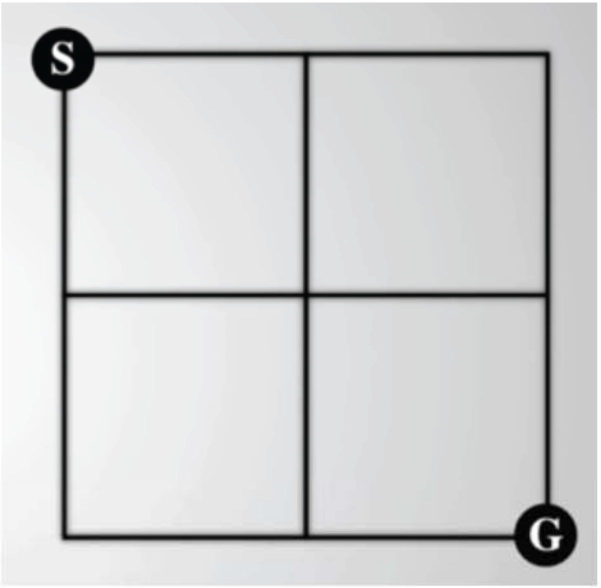


図2：2×2

12通り

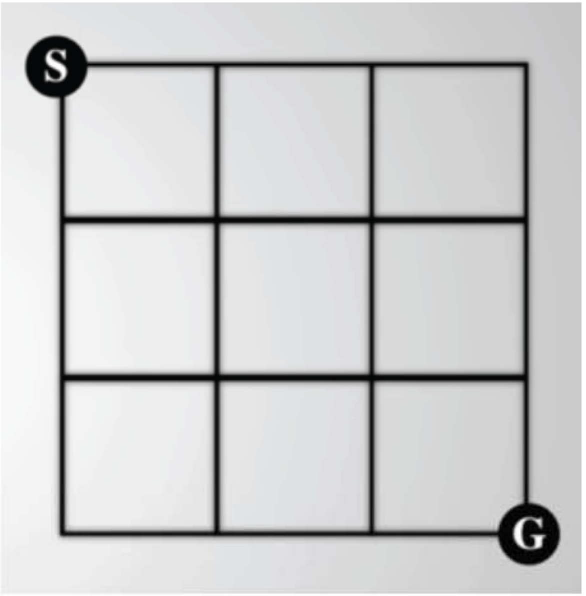
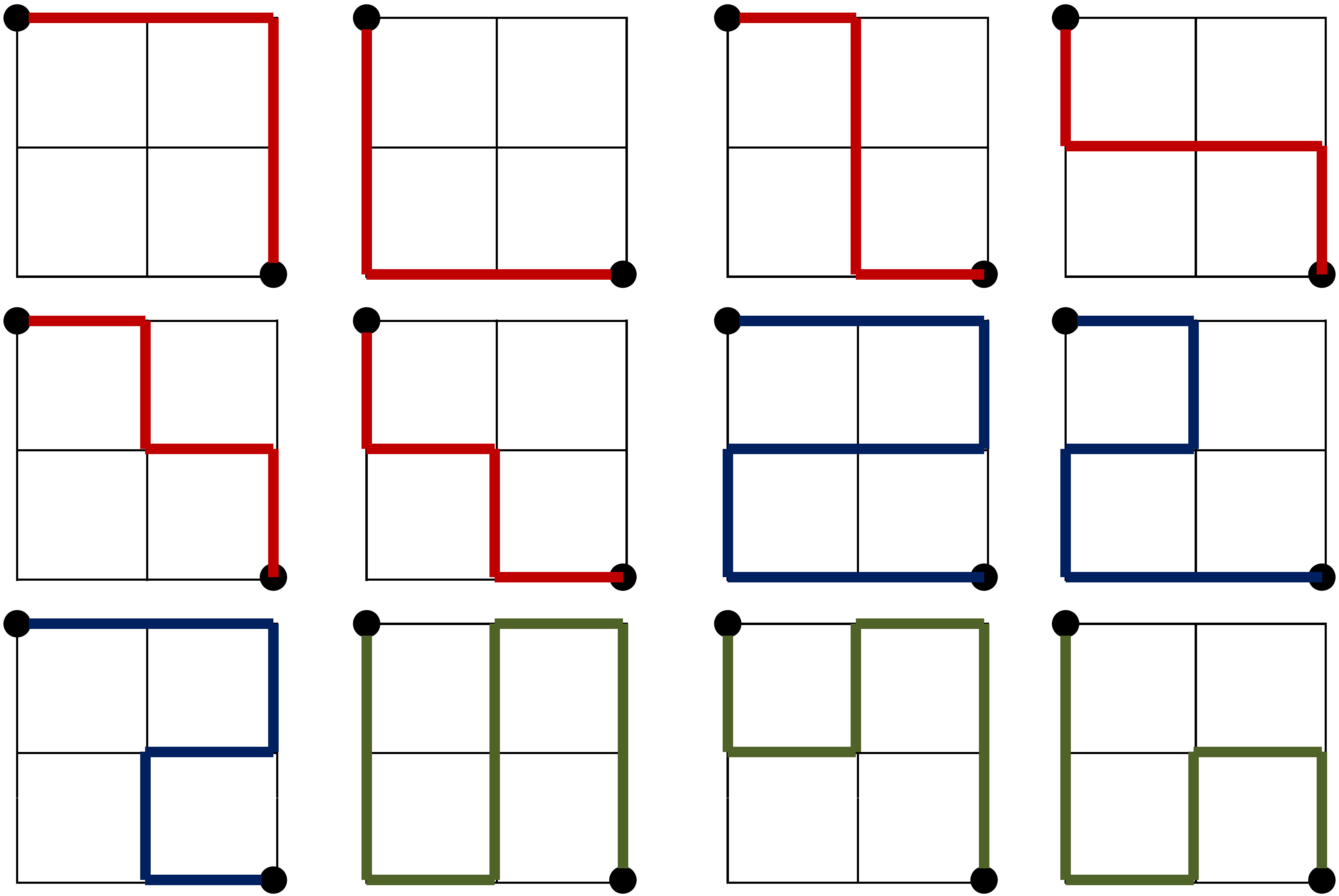


図3：3×3

184通り

解答例(2×2の場合)



ちなみに…

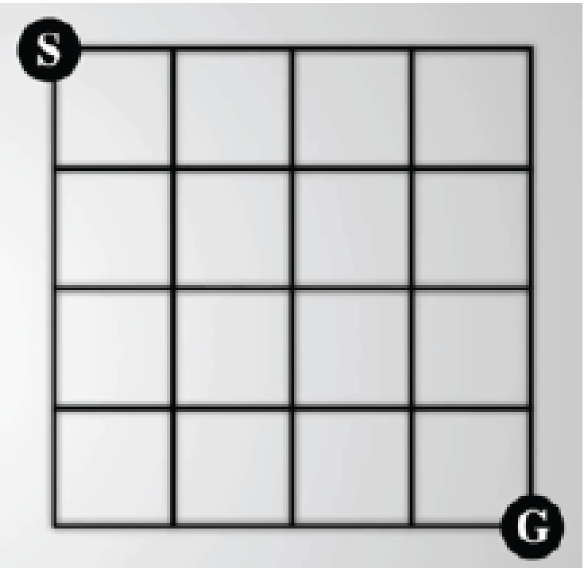


図4：4×4

8512通り

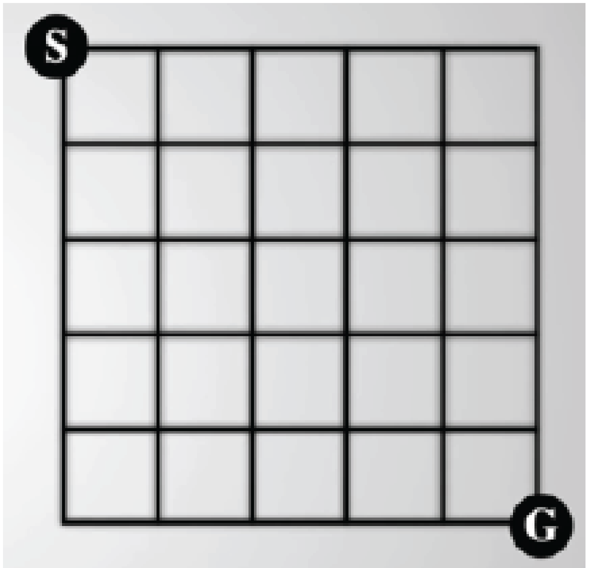


図5：5×5

126万2816通り

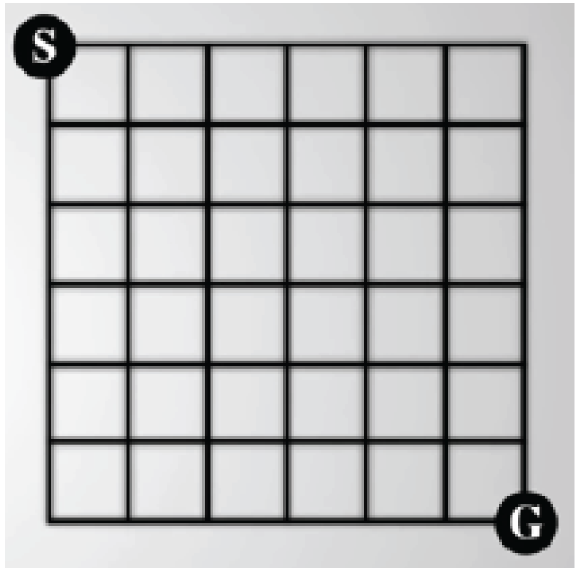


図6：6×6

5億7578万0564通り

急激な増加!

→　指数(以上の)オーダーは探索に時間がかかりすぎる

組合せ爆発

組合せ爆発

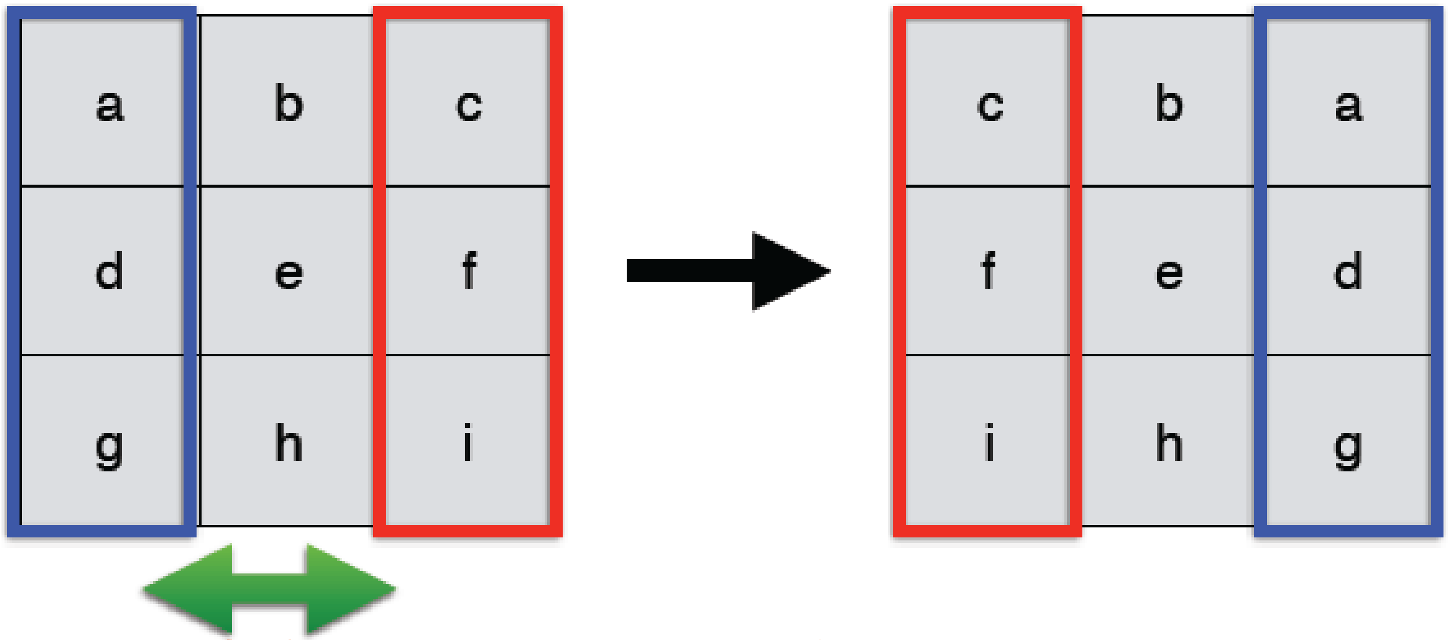
問題のサイズｎに対して，指数オーダー以上の早さで解の候補数が増加すること

→組合せ爆発が起こる場合，**コンピュータを用いたとしても，愚直な探索では現実的な時間内で解を探せない**かもしれない．

魔方陣で対称性を確認

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを埋める．
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい．

列の鏡映

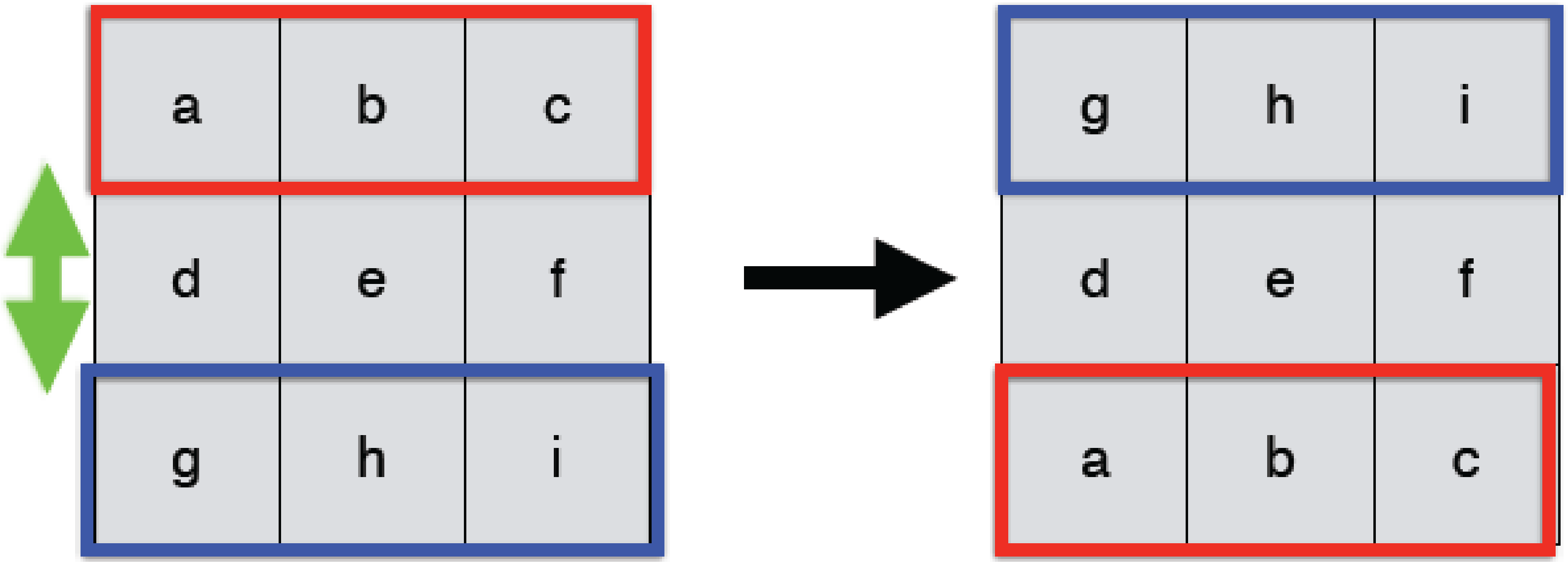


条件を保存する変換になっている

魔方陣で対称性を確認

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

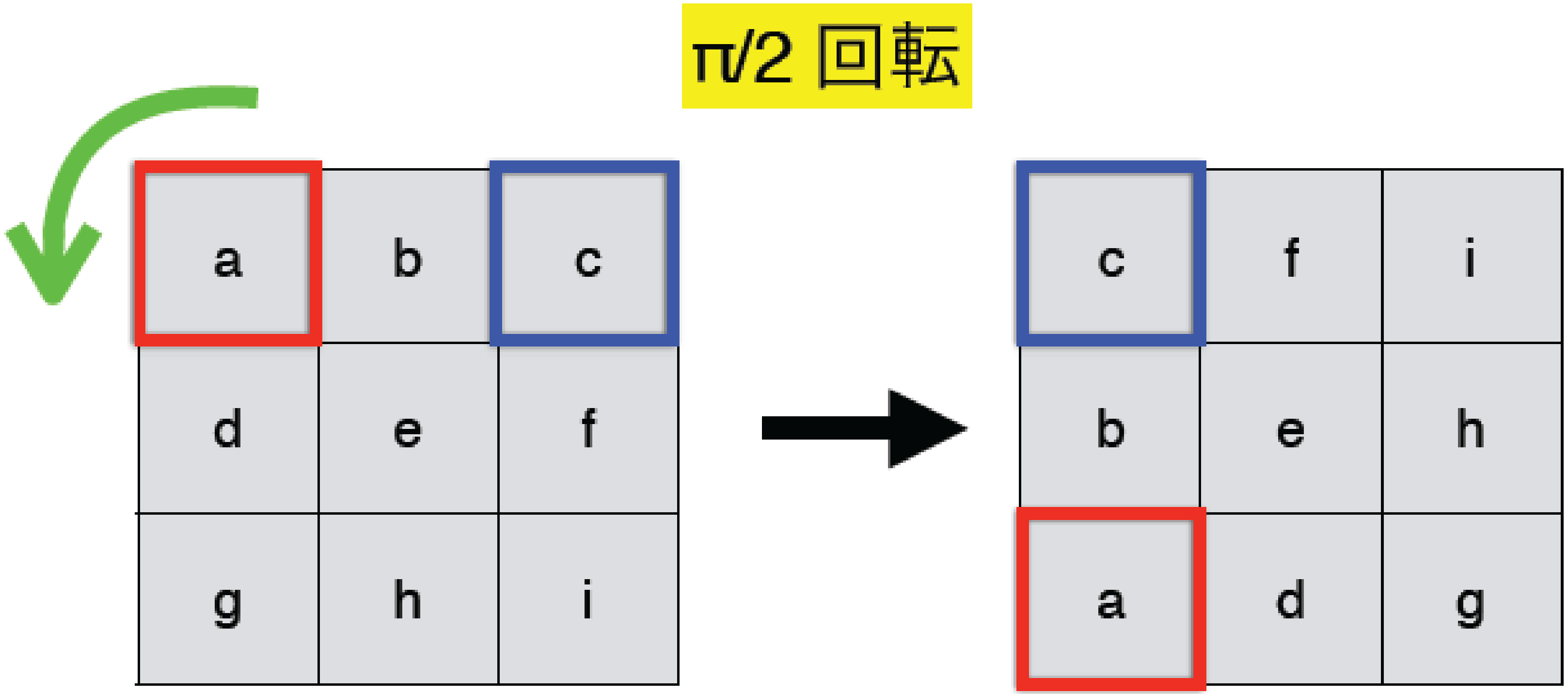
行の鏡映



条件を保存する変換になっている

魔方陣で対称性を確認

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

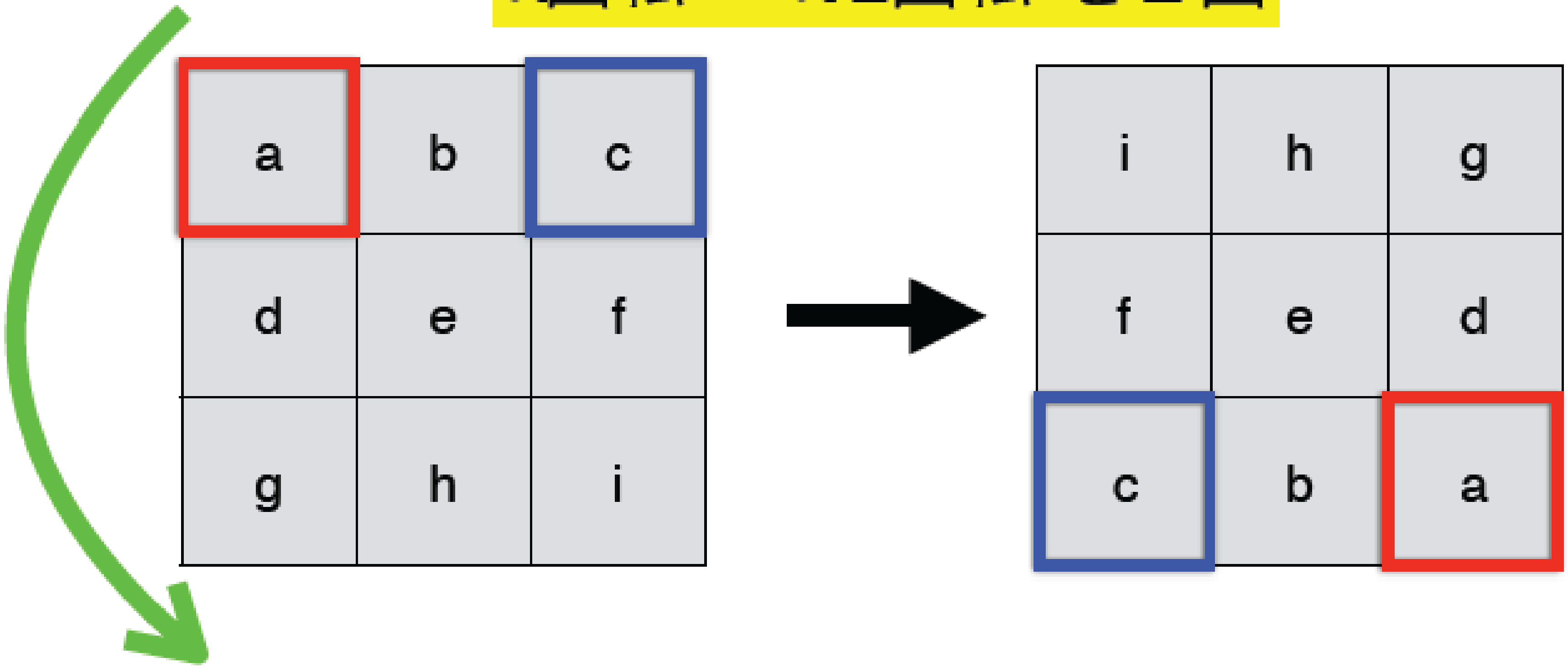


条件を保存する変換になっている

魔方陣で対称性を確認

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

π回転 = “π/2回転”を２回

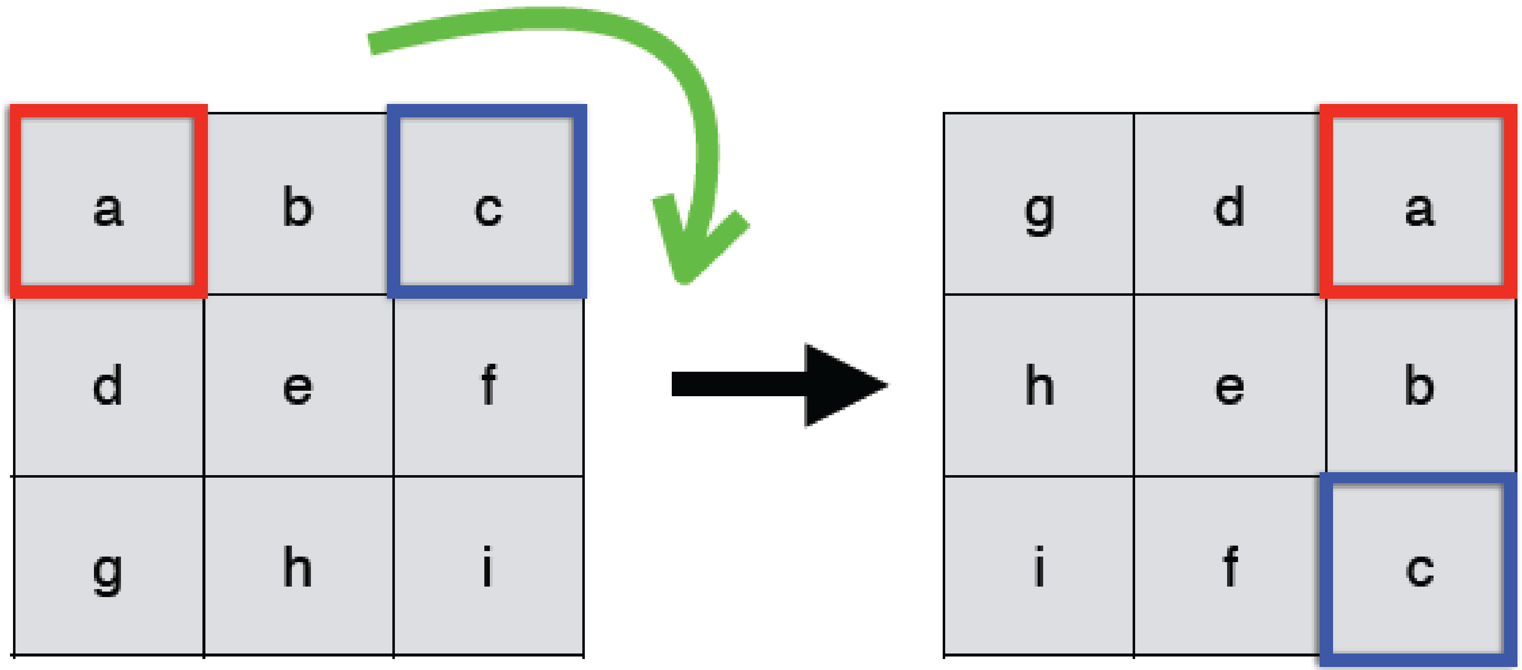


条件を保存する変換になっている

魔方陣で対称性を確認

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを埋める．
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい．

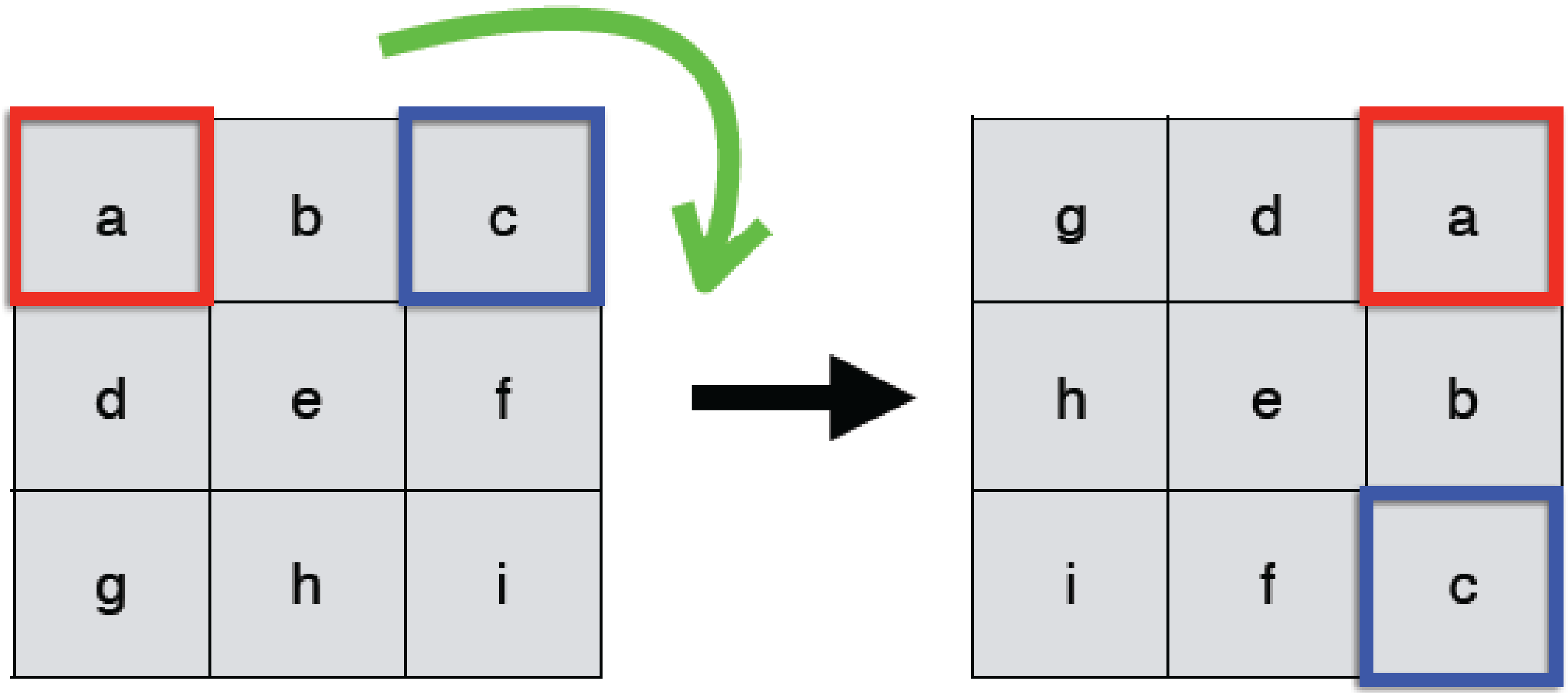
3π/2 回転 = -π/2回転



条件を保存する変換になっている

魔方陣で対称性を確認

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.



これらをふまえて演習です

演習問題3-3

- 目的：3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 条件：各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.
- 条件の下で，以下のステップを参考に，魔方陣の組合せはいくつあるか．それらを全て書きなさい.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

- ステップ１：各行，各列，対角線の和を求める
- ステップ２：中央の数値を決定する
- ステップ３：1と9の位置を決定する(対称性を用いる)
- ステップ４：1を含む行または列に入る数字２つを決定する
- ステップ５：魔方陣を数え上げ，全てを書く

ステップを踏んでいこう

演習問題3-3

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを　埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

ステップ１：各行の和を求める

(a+b+c) + (d+e+f) + (g+h+i) = 45

(∵) 全て異なる1から9までの数の和だから

a+b+c = d+e+f = g+h+i

(∵) 条件より，各行の和は等しいから

よって各行の和は a+b+c = d+e+f = g+h+i = 15
条件より各列，対角線は行の和15に等しい

ステップを踏んでいこう

演習問題3-3

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを　埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

ステップ２：中央の数値を決定する

$(d+e+f) + (b+e+h) + (a+e+i) + (c+e+g)$

$= 3e + (a+b+c) + (d+e+f) + (g+h+i)$

$\underline{\mathbf{= 3e + 45}}$

一方で条件より，

$(d+e+f) + (b+e+h) + (a+e+i) + (c+e+g)$

$= 15 + 15 + 15 + 15 = 60$

よって $3e + 45 = 60$．すなわち $\underline{\mathbf{e = 5}}$.

ステップを踏んでいこう

演習問題3-3

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを　埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

ステップ３：1と9の位置を決定する(対称性を用いる)

ステップ1より各行，各列，対角線の和は15

→ 1と9の位置は中央の数字に関して反対側に位置する.

→ 1と9の位置を決定する =1の位置を決定する

1の位置は中央以外の 8通り ありうる.

→**a=1 or b=1の場合の解が得られれば，**

対称性より他の場合の解も全て得られる

a	b	c
d	5	f
g	h	i

ステップを踏んでいこう

演習問題3-3

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを　埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

a=1の場合，i=9となる

c>5 の場合，fが何でも
３列目の総和が15を超える

1	b	c=6
d	5	f=×
g	h	9

c<5 の場合，bが何でも
1行目の総和が15を下回る

1	b=×	c=4
d	5	f
g	h	9

ステップを踏んでいこう

<u>演習問題3-3</u>

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを　埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

<u>a=1の場合，i=9となる</u>

<u>c>5 の場合</u>，fが何でも
３列目の総和が15を超える

<u>c<5 の場合</u>，bが何でも
1行目の総和が15を下回る

a=1 の場合は解なし → b=1 の場合のみ考えれば良い

ステップを踏んでいこう

演習問題3-3

- 3×3の表を1から9の数字を一つずつ用いてマスを　埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

ステップ4：1を含む行または列に入る数字２つを決定する

b=1の場合，h=9となる

→ **a=8 または c=8 でないと1行目の総和が15にならない**

8	1	6
3	5	7
4	9	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

解答例

演習問題3-3

ステップ５：魔法陣を数え上げ，全て書く→8つ

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

実は…

演習問題3-3

ステップ５：魔法陣を数え上げ，全て書く→8つ

6	1	8
7	5	3
2	9	4

回転

2	7	6
9	5	1
4	3	8

回転

4	9	2
3	5	7
8	1	6

回転

8	3	4
1	5	9
6	7	2

鏡映　鏡映　鏡映　鏡映

8	1	6
3	5	7
4	9	2

回転

4	3	8
9	5	1
2	7	6

回転

2	9	4
7	5	3
6	1	8

回転

6	7	2
1	5	9
8	3	4

3×3の魔法陣では対称性によって全ての解が移り合う

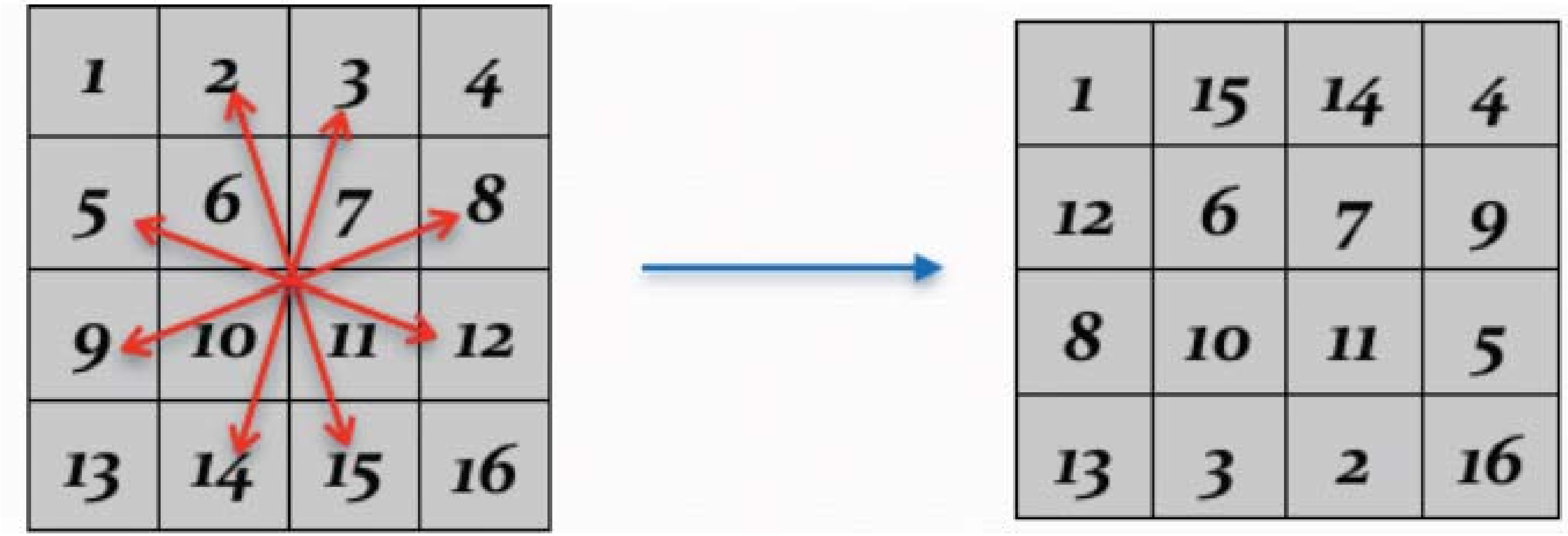
4×4の魔方陣では？

演習3-4

- 4×4の表を1から16の数字を一つずつ用いてマスを埋める．
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい．

Q:全ての解は鏡映と回転で移り合うか？

移り合うならそれを証明し，移り合わないのであれば反例を挙げよ．



4×4の魔方陣では？

<u>演習3-4</u>

- 4×4の表を1から16の数字を一つずつ用いてマスを埋める.
- 各行，各列，対角線上のマスの和は等しい.

Q:全ての解は鏡映と回転で移り合うか？→×(下が反例)

1	15	14	4
8	10	11	5
12	6	7	9
13	3	2	16

2	13	12	7
11	8	1	14
5	10	15	4
16	3	6	9

対称性を考慮することで解の種類を絞り込めるが，
全ての解が対称性を保存する変換で移り合うわけではない

本日の演習です

演習3-5

- 組み合わせ爆発が起こる例を２つ以上挙げなさい.
(組み合わせ爆発が起こる身近な例があるはず)
- また，それらの例において，問題のサイズ n に対し，解の候補数が指数オーダーで増加することを示しなさい.